

文章编号:1005-6122(2004)01-0001-05

# 波动方程 FDTD 算法的 PML 吸收边界条件的实现与验证\*

孔繁敏 李康 刘新 郭毅峰  
(山东大学信息科学与工程学院, 济南 250100)

**摘要:** 实现了波动方程 FDTD 算法的 PML 吸收边界条件(WE-PML), 并进行了数值验证。从结果可以看出, WE-PML 的性能与 Berenger-PML 非常接近, 优于 Mur 二阶近似吸收边界条件。同时, 对 PML 媒质参数进行了优化, 结果表明, WE-PML 的性能主要是由 PML 的层数、垂直入射时的理论反射系数决定的, WE-PML 参数的优化结果与 Gedney 的经验值基本一致。

**关键词:** 时域有限差分法, 波动方程, 理想匹配层

## Implementation and Validation of the PML Absorbing Boundary Condition for Wave Equation FDTD Method

Kong Fanmin, Li Kang, Liu Xin, Guo Yifeng

(School of Information Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250100)

**Abstract:** The perfectly matched layer absorbing boundary condition for the wave equation FDTD method (WE-PML) is implemented and validated. The results show this method can attain the same performance as Berenger - PML using the same PML parameters and is much better than Mur' 2nd approximation absorbing boundary condition. In addition, the WE-PML parameters are optimized. It is demonstrated that the performance of WE-PML mainly depends on the thickness of the PML medium and the theoretical reflection factor at normal incidence. The optimized parameters of WE-PML are in agreement with Gedney's experience values.

**Key words:** Finite-difference time-domain method, Wave equation, Perfectly matched layer

### 引言

时域有限差分法(FDTD)<sup>[1]</sup>是当前解决电磁场问题最受欢迎的数值方法之一。FDTD 算法具有简洁和直观的特性, 可对结构复杂的导体、绝缘介质以及非线性、各向异性物质建模, 并随着计算机性能的提高和成本下降, 已被广泛地应用于计算电磁学的各个领域<sup>[2]</sup>。FDTD 在解决实际电磁场问题时, 仿真网格数相当庞大, 因此导致 FDTD 算法在微机上运行耗时长, 而且内存需求也常常受限。为此, 人们提出了一种简化的 FDTD 算法, 该方法直接利用 FDTD 方法对标量波动方程进行求解, 得出波动方程的 FDTD 算法(WE-FDTD)<sup>[3,4]</sup>。WE-FDTD 算法

为了计算每一时间步的场值, 需要前两次时间步的场值, 但由于包含一个未知场量, 故能大大提高计算效率和节约存储空间。

吸收边界的处理是 FDTD 算法的一个关键问题, 吸收边界条件的效果直接关系到 FDTD 计算的正确性和精确度, 是影响 FDTD 计算品质的决定因素。J. P. Berenger 于 1994 年首先提出了理想匹配层(PML)吸收边界条件的概念<sup>[5]</sup>。1996 年, S. D. Gedney 提出了各向异性介质 PML 理论并用于 FDTD 区域的吸收边界<sup>[6]</sup>。与传统的 Mur 二阶近似吸收边界条件相比<sup>[7]</sup>, PML 吸收边界条件可提高精度 40dB 左右, 是目前最好的吸收边界条件。PML 吸收边界条件是针对矢量 FDTD 算法提出的, 并不

\* 收稿日期:2003-06-17;定稿日期:2003-09-12

基金项目:山东大学青年基金项目(编号:11170051310029)

能直接用于标量的 WE - FDTD 算法。最近, M. A. Alsunaidi 导出了 PML 媒质中波动方程的表达式<sup>8</sup>, 但它忽略了电导率是空间坐标的函数。D. Zhou 基于伸张坐标系下的标量波动方程导出了一维 PML 的差分格式<sup>[9]</sup>, 并用于光器件的仿真中, 获得了非常好的结果。

本文实现了波动方程 FDTD 算法的 PML 吸收边界条件(WE - PML), 并利用二维空间中的 TM 波进行了数值验证, 同时对 PML 媒质参数进行了优化和分析。

## 1 WE-PML 吸收边界条件

在 PML 媒质中, 利用伸张坐标中的 PML 表达式, 频域 Maxwell 方程组可写为<sup>[10]</sup>。

$$\nabla_s \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (1)$$

$$\nabla_s \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E} \quad (2)$$

式(1)中,  $\nabla_s = \mathbf{a}_x \frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{1}{s_z} \frac{\partial}{\partial z}$ ,  $s_x, s_y$  和  $s_z$  分别为沿  $x, y, z$  方向的伸张坐标变量, 其定义为

$$s_\eta = 1 + \sigma_\eta / j\omega\varepsilon \quad (\eta = x, y, z) \quad (3)$$

对式(1)求旋度, 并利用式(2)得

$$\nabla_s \times \nabla_s \times \mathbf{E} = -j\omega\mu \nabla_s \times \mathbf{H} = -(j\omega)^2 \mu\varepsilon \mathbf{E} \quad (4)$$

利用  $\nabla_s \times \nabla_s \times \mathbf{E} = \nabla_s (\nabla_s \cdot \mathbf{E}) - \nabla_s^2 \mathbf{E}$  及  $\nabla_s \cdot \mathbf{E} = 0$ , 式(4)可写为

$$\nabla_s^2 \mathbf{E} - \mu\varepsilon(j\omega)^2 \mathbf{E} = 0 \quad (5)$$

同样可以得到

$$\nabla_s^2 \mathbf{H} - \mu\varepsilon(j\omega)^2 \mathbf{H} = 0 \quad (6)$$

式(5)、式(6)为波动方程在 PML 媒质中的频域形式。

在直角坐标系下, 电场  $\mathbf{E}$  和磁场  $\mathbf{H}$  沿  $x, y, z$  方向的分量均满足下列标量波动方程

$$\nabla_s^2 \Psi - \mu\varepsilon(j\omega)^2 \Psi = 0 \quad (7)$$

式(7)中  $\Psi$  代表电场  $\mathbf{E}$  和磁场  $\mathbf{H}$  的各分量。

对于图 1 所示的长方体计算区域, 为了能使电磁波在 PML 媒质中被有效吸收,  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  在不同的区域有不同的数值, 这一点与 Berenger 的 PML 媒质中电导率参数的设置基本相同。

例如, 在长方体计算区域的 8 个顶角区域,  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  均不为 0, 所以  $s_\eta = 1 + \sigma_\eta / j\omega\varepsilon$  ( $\eta = x, y, z$ ), 式(7)可写为

$$\sum_{\eta=x,y,z} \frac{1}{1 + \sigma_\eta / j\omega\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{1 + \sigma_\eta / j\omega\varepsilon} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right) = \mu\varepsilon(j\omega)^2 \Psi \quad (8)$$

为了得到式(8)的时域形式, 引入辅助变量  $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2$ , 其定义为

$$\begin{cases} j\omega X_1 = \frac{1}{1 + \sigma_x / j\omega\varepsilon} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ j\omega X_2 = \frac{1}{1 + \sigma_x / j\omega\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} (j\omega X_1) \end{cases} \quad (9a)$$

$$\begin{cases} j\omega Y_1 = \frac{1}{1 + \sigma_y / j\omega\varepsilon} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ j\omega Y_2 = \frac{1}{1 + \sigma_y / j\omega\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} (j\omega Y_1) \end{cases} \quad (9b)$$

$$\begin{cases} j\omega Z_1 = \frac{1}{1 + \sigma_z / j\omega\varepsilon} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \\ j\omega Z_2 = \frac{1}{1 + \sigma_z / j\omega\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} (j\omega Z_1) \end{cases} \quad (9c)$$

将式(9)代入式(8)得

$$X_2 + Y_2 + Z_2 = \mu\varepsilon(j\omega) \Psi \quad (10)$$

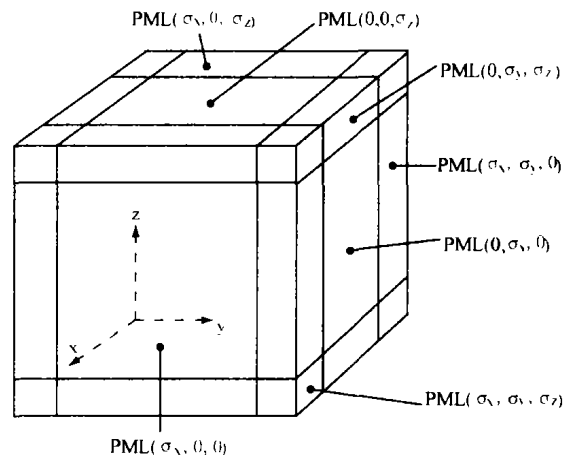


图 1 PML 媒质中电导率的设置

将式(9)、式(10)中的  $j\omega$  用  $\partial/\partial t$  代替, 则得到顶角区域 PML 媒质中标量波动方程的时域形式

$$\begin{cases} \frac{\partial X_1}{\partial t} + \frac{\sigma_x}{\varepsilon} X_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ \frac{\partial X_2}{\partial t} + \frac{\sigma_x}{\varepsilon} X_2 = \frac{\partial^2 X_1}{\partial x \partial t} \end{cases} \quad (11a)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial Y_1}{\partial t} + \frac{\sigma_y}{\varepsilon} Y_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial t} + \frac{\sigma_y}{\varepsilon} Y_2 = \frac{\partial^2 Y_1}{\partial y \partial t} \end{cases} \quad (11b)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial Z_1}{\partial t} + \frac{\sigma_z}{\varepsilon} Z_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial z} \\ \frac{\partial Z_2}{\partial t} + \frac{\sigma_z}{\varepsilon} Z_2 = \frac{\partial^2 Z_1}{\partial z \partial t} \end{cases} \quad (11c)$$

$$X_2 + Y_2 + Z_2 = \mu \varepsilon \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (11d)$$

对于式(11)采用中心差分法进行近似,可以得到顶角区域 PML 媒质中标量波动方程的差分格式。在差分近似时,应注意一点,  $X_1, Y_1, Z_1$  变量在空间上与  $\Psi$  相差半个步长,  $X_2, Y_2, Z_2$  变量与场量  $\Psi$  在同一位置。在计算时,可先更新  $X_1, Y_1, Z_1$  变量,再更新  $X_2, Y_2, Z_2$  变量,最后更新场量  $\Psi$ 。

在 PML 媒质的其他区域,也可以采用类似引入辅助变量的方法导出波动方程在相应区域的差分格式,在此不再赘述。

在 PML 媒质内沿  $\eta$  方向的电导率分布为

$$\sigma_\eta(\rho) = \sigma_{\max}(\rho/\delta)^m \quad (\eta = x, y, z) \quad (12)$$

式(12)中  $\sigma_{\max}$  为最大电导率,  $\rho$  为相对分界面的 PML 分布厚度,  $\delta$  为 PML 的厚度,  $m$  为电导率分布阶数。 $\sigma_{\max}$  可根据下面经验公式选取:

$$\sigma_{\max} = - \frac{(m+1)\varepsilon c_0 \ln(R_0)}{2\delta} \quad (13)$$

式(13)中  $R_0$  为垂直入射时的理论反射系数,  $c_0$  为真空中的光速。取  $\rho = i\Delta\eta$ ,  $\delta = n_l\Delta\eta$ , 则式(12)可写成

$$\sigma_\eta(i) = - \frac{(m+1)\varepsilon c_0 \ln(R_0)}{2n_l\Delta\eta} (i/n_l)^m \quad (\eta = x, y, z) \quad (14)$$

式(14)中,  $n_l$  为 PML 媒质的层数,  $\Delta\eta$  为 PML 媒质中的空间步长。

## 2 数值验证

为了验证上述方法,我们利用二维空间中的 TM 波进行了验证。对于二维 TM 波,电场只有一个分量,故只用这一电场分量就能反映波的传播特性。

取  $Q_B$  作为基础计算网格空间,而其中的一部分  $Q_T$  作为试验网格空间,它的边界带有要考察的 PML 吸收边界条件,如图 2 所示。在以下的计算中,取  $Q_B$  的网格数为  $400 \times 400$  个,  $Q_T$  的网格数为  $100 \times 50$  个,时间步长  $\Delta t$  为  $2.5 \times 10^{-11}$  s,空间步长  $\Delta\eta$  为  $2c_0\Delta t$ 。

在计算网格中心  $(0,0)$  点设置一线源,令其激发一窄脉冲波(见图 3),其定义为<sup>[11]</sup>

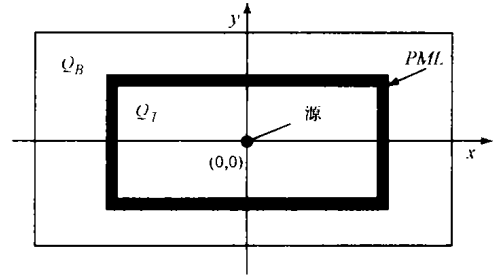


图 2 数值试验网格空间

$$E_z^n(0,0) = \begin{cases} \alpha(10 - 15\cos\omega_1 t + 6\cos\omega_2 t - \cos\omega_3 t) & t \leq \tau \\ 0 & t > \tau \end{cases} \quad (15)$$

式(15)中,  $\alpha = 1/320$ ,  $\tau = 10^{-9}$  s,  $t = n\Delta t$ ,  $\omega_m = 2\pi m/\tau$  ( $m = 1, 2, 3$ )。

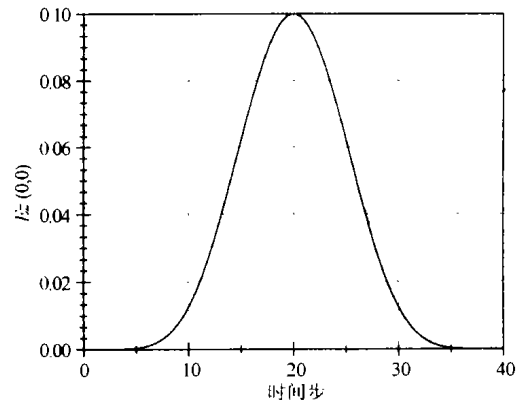


图 3 试验脉冲波形

在  $Q_B$  截断边界处的反射波尚未到达  $Q_T$  的边界之前,对于  $Q_T$  而言,  $Q_B$  仍与无限大计算空间无异,考察  $Q_B$  和  $Q_T$  中电场分量  $E_z$  的差异就能评价  $Q_T$  所用吸收边界条件的性能。

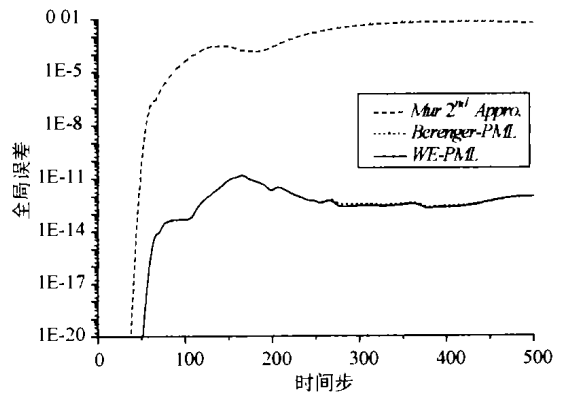


图 4 WE-PML 的数值测试结果 ( $R_0 = 10^{-4}$ ,  $m = 3$ ,  $n_l = 10$ )

定义  $Q_T$  空间在第  $n$  时间步电场分量  $E_z$  的全局误差如下

$$\varepsilon_T^n = \sum_{i=-50j=-25}^{50} \sum_{j=-25}^{25} (E_{zT}^n(i,j) - E_{zB}^n(i,j))^2 \quad (16)$$

图4给出了WE-PML吸收边界条件与其它吸收边界条件的性能测试结果的比较,这里WE-PML和Berenger-PML采用相同的参数: $R_0 = 10^{-4}$ ,  $n_l = 10$ ,  $m = 3$ 。从图中可以看出,与Mur二阶近似吸收边界相比,WE-PML的吸收效果具有明显的优越性。从全局误差随时间步的变化可以看出,WE-PML的吸收效果与Berenger-PML非常一致。

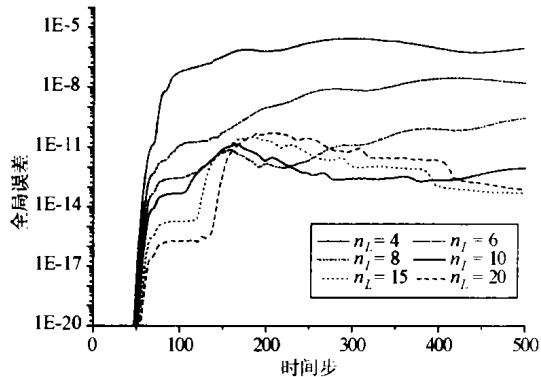


图5 不同PML层的WE-PML的测试结果( $R_0 = 10^{-4}$ ,  $m = 3$ )

图5给出了不同PML层的WE-PML性能测试结果,从图中可以看出,随着PML层数 $n_l$ 的增加,WE-PML的吸收效果逐渐改善,但当 $n_l$ 增加到8层以上时,WE-PML的吸收效果变化不太明显。故为了减少计算时间,可在8~10之间选取 $n_l$ 的值。

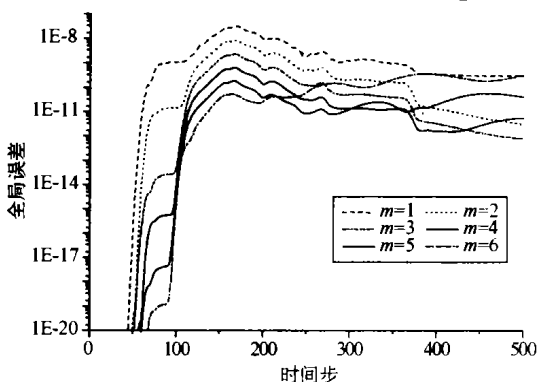


图6 不同电导率分布的WE-PML的测试结果( $R_0 = 10^{-3}$ ,  $n_l = 10$ )

图6给出了不同电导率分布的WE-PML性能测试结果,从图中可以看出,随着电导率分布阶数 $m$ 的增加,WE-PML的吸收效果有增强的趋势,但 $m$ 大于5时,WE-PML的吸收效果有衰退的趋势。在计算时,选取 $m = 4$ 可得到比较理想的结果。

图7给出了不同垂直入射时的理论反射系数 $R_0$ 的WE-PML性能测试结果。从图中可以看出,随着 $R_0$ 的减小,WE-PML的吸收效果逐渐增强,但当 $R_0$ 减小到 $10^{-3}$ 以下时,WE-PML的吸收效果变化不

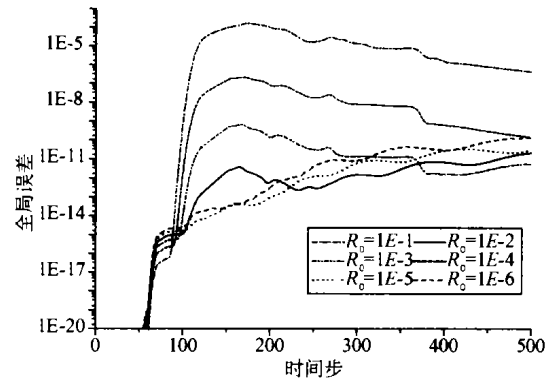


图7 不同 $R_0$ 的WE-PML的测试结果( $m = 3$ ,  $n_l = 10$ )

太明显。在计算时,可在 $10^{-3} \sim 10^{-5}$ 之间选取 $R_0$ 的值。

从图5、图6和图7的数值测试结果比较可知,相对电导率分布阶数而言,PML的层数和垂直入射时的理论反射系数对WE-PML的吸收效果影响较大,这些参数的优化值与Gedney的经验值基本一致。

### 3 结论

本文实现了波动方程的PML吸收边界条件,并进行了数值验证。从结果可以看出,WE-PML的性能与Berenger-PML非常接近。同时,对PML媒质参数进行了优化。结果表明,WE-PML的性能主要是由PML的层数、垂直入射时的理论反射系数决定的,WE-PML参数的优化结果与Gedney-PML的经验值基本一致。PML吸收边界条件的实现对于提高WE-FDTD算法的计算精度和效率具有十分重要的意义。

### 参考文献

- [1] Yee K S. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. IEEE Trans. Antennas and Propagation. 1966, 14(3), 302~307, 1966
- [2] Telfove A. Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method, Norwood, MA: Artech House, 1995
- [3] Aoyagi P H, Lee J F, Mittra Raj. A hybrid Yee algorithm/scalar-wave equation approach. IEEE Trans. MTT, 1993(41): 1593~1600
- [4] Huang W etc. . A scalar finite - difference time - domain approach to guided - wave optics. IEEE, Photonics. Tech. Lett, 1991, 3(6): 524~526
- [5] Berenger J P. A Perfectly Match Layer for the absorption

- of Electromagnetic Waves. Journal of Computational Physics. 1994, 114:185 ~ 200
- [6] Gedney S D. An anisotropic perfectly matched layer-absorbing medium for truncation of FDTD lattices. IEEE Trans. Antennas and Propagation. 1996, 44(12):1630 ~ 1639
- [7] Mur G. Absorbing Boundary Conditions for the Finite-Difference Approximation of the Time-Domain Electromagnetic-Field Equations. IEEE Trans. EMC, 1981, 23(4):377 ~ 382
- [8] Alsunaidi M A, elsallal W. A PML-FDTD formulation for the simulation of optical structures. Microw. Opt. Tech. Lett, 1999, 22(5):355 ~ 358
- [9] Zhou D etc. The perfectly matched layer boundary condition for scalar finite - difference time domain method. IEEE, Photonics. Tech. Lett. , 2001, 13(5):454 ~ 456
- [10] Chew W C, Weedon W H. A 3-D perfectly matched medium for modified Maxwell's equations with stretched coordinates. Microw. Opt. Tech. Lett. , 1994(7):257 ~ 260
- [11] Tirka P A etc, Higher order absorbing boundary conditions for the finite-difference time-domain method. IEEE Trans. Antennas and Propagation, 1992, 40(10):1215 ~ 1222

**孔繁敏** 男,1969 年出生于山东泗水,1994 年在山东大学电子工程系获硕士学位,1999 年在山东大学物理系获博士学位。现为山东大学信息科学与工程学院副教授,硕士生导师,研究兴趣包括计算电磁学、微波技术理论及应用、微波器件和光器件的 CAD。

E-mail:kongfm@sdu.edu.cn

**李康** 男,1962 年出生于山东济南,1987 年在山东大学电子工程系获硕士学位,现为山东大学信息科学与工程学院教授,硕士生导师,研究兴趣包括微波测量技术,以及光通信器件与系统的计算机仿真与设计。

E-mail:kangli@sdu.edu.cn

## 祝贺本刊论文获奖

为促进我国学科发展、科技进步、人才成长,充分调动科技人员的积极性,进一步提高学术论文质量,2003 年中国科协举办了第一届优秀学术论文评选活动。本刊发表的论文《大型有源相控阵校准的 MCM 法及其误差分析》,经专家评审委员会评审,荣获第一届中国科协期刊优秀学术论文奖。

《微波学报》编辑部